Keine Ahnung vom Rechnen mit Beträgen

Wie berechnet man

Beträge von Zahlen

und von linearen Termen

?

Datei Nr. 12160

Stand 28.6.2021

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

Texte der Mathe-CD zum Rechnen mit Beträgen:

12160	**Keine Ahnung** vom Rechnen mit Beträgen Einfache Betragsgleichungen	(5 Seiten)
12161	**Keine Ahnung** von linearen Betragsungleichungen (Dieser Text)	(7 Seiten)
12162	Betragsgleichungen: Große Sammlung in allen Schwierigkeitsgraden	
12163	**Keine Ahnung** von quadratischen Betragsgleichungen	(5 Seiten)
12164	Betragsungleichungen: Große Sammlung in allen Schwierigkeitsgraden	

Inhalt

1. Betrag einer Zahl

Der Betrag IxI einer Zahl x ist der „Befehl“, ***diese Zahl x positiv zu machen***.

Beispiel: Wenn x = -5 ist, dann bedeutet $|x| = 5$, also $|-5| = 5$

Ist die Zahl x schon positiv, etwa x = 5, dann bedeutet $|x| = 5$, also $|5| = 5$

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}}$$

Die untere Definitionszeile verstehen Schüler oft nicht. Dazu noch ein Beispiel:

Wenn x negativ ist, also z. B. x = - 7, dann ist $|x| = |-7| = 7$.

Dasselbe erreicht man durch ein zusätzliches Minuszeichen $-x = -(-7) = 7$

Also ist $|-7| = -(-7)$

Diese Regel gilt für negative Zahlen: Wenn x < 0 ist, dann $|x| = -x$

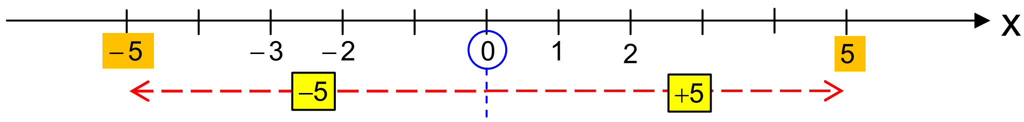
Oder: $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$ was dasselbe ist wie $\left|-\frac{2}{3}\right| = -\left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{2}{3}$

$|24| = 24$

$\left|\sqrt{13}\right| = \sqrt{13}$ denn $\sqrt{13} > 0$

$\left|(-5)^2\right| = (-5)^2 = 25$ oder so: $\left|(-5)^2\right| = |25| = 25$

2 Abstände mit dem Betrag berechnen



Erkenne: Die Zahlen 5 und – 5 (auf der Zahlenachse) haben denselben **Abstand von Null**, nämlich 5 (Längeneinheiten)!

Der Betrag einer Zahl gibt also ihren **Abstand von 0** an!

Beispiel 1 Die Gleichung $|x| = 5$ heißt mit Worten

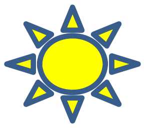
Welche Zahlen haben den Betrag 5?

oder: **Welche Zahlen haben von 0 den Abstand 5?**

Ergebnis: Es sind die Zahlen 5 und - 5.

Kurzlösung:

$$|x| = 5$$
$$x_{1,2} = \pm 5$$



Beispiel 2 $|x| = 17 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm 17$

Beispiel 3

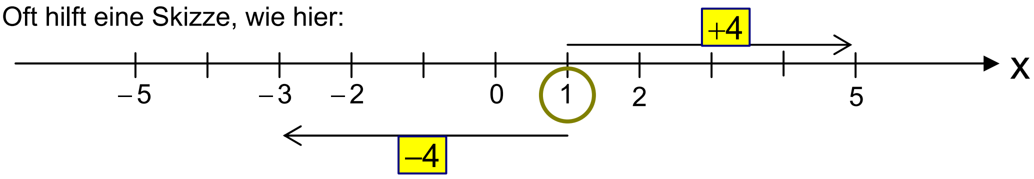
$$|x| = -4$$

Da ein Abstand nie negativ werden kann,
besitzt diese Gleichung keine Lösung: $L = \{\ \}$.

Beispiel 4 **Berechne selbst:** Welchen Abstand hat …

a) die Zahl 1 von der Zahl 5 ?
b) die Zahl -3 von der Zahl 1 ?
c) die Zahl -12 von der Zahl -7 ?

Oft hilft eine Skizze, wie hier:



Man berechnet Zahlenabstände durch Subtrahieren:

a) Abstand der Zahl 1 von 5: $d = 5 - 1 = 4$

b) Abstand der Zahl -3 von 1: $d = 1 - (-3) = 1 + 3 = 4$

c) Abstand der Zahl -12 von -7? $d = -7 - (-12) = -7 + 12 = 5$

Hier kann man schnell diesen Fehler machen: $d = -12 - (-7) = -12 + 7 = -5$

Abstände sind nie negative Zahlen. Daher kann man diese Rechnung nachträglich schnell dadurch korrigieren, dass man Betragsstriche setzt, denn die machen bekanntlich das Argument positiv: $d = |-12 - (-7)| = |-12 + 7| = |-5| = 5$

Soll man also den Abstand zweier Zahlen a und b angeben, dann <u>subtrahiert man sie im Betrag:</u> $d = |a-b|$ oder $d = |b-a|$

Beide Berechnungen liefern dasselbe Ergebnis: $\boldsymbol{|a-b| = |b-a|}$

Denn: Ist a > b, dann ist $a-b>0$ bereits der Abstand, aber b – a ist negativ, dagegen ist dann $|b-a|>0$ wieder positiv.

Der Betrag ist hier also eine Sicherheitsmaßnahme damit nichts falsch wird.

Beispiele 5

a) Abstand der Zahlen -3 und 8:

$d = |-3 \boxed{-} 8| = |-11| = 11$ oder:

$d = |8 \boxed{-} (-3)| = |8+3| = |11| = 11$

b) Abstand der Zahlen 13 und 42:

$d = |13 \boxed{-} 42| = |-29| = 29$ oder:

$d = |42-13| = |29| = 29$

c) Abstand der Zahlen -17 und -8:

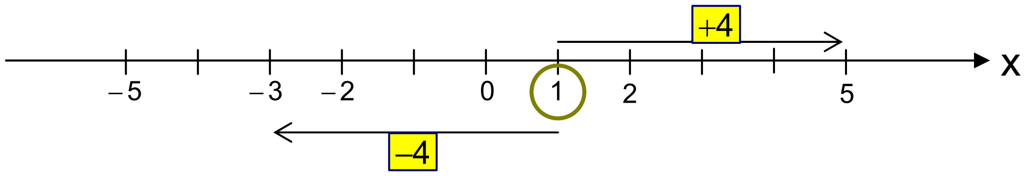
$d = |-17 \boxed{-} (-8)| = |-17+8| = |-9| = 9$ oder

$d = |-8 \boxed{-} (-17)| = |-8+17| = |9| = 9$

3 Abstandsgleichungen lösen

Betragsgleichungen suchen nach Zahlen, die einen bestimmten Abstand haben sollen.

Beispiel 6 Welche Zahlen haben von der Zahl 1 den Abstand 4 ?



An Hand einer solchen Skizze findet man schnell die Lösung: Es sind die Zahlen -3 und 5.

Die Algebraische Lösung besteht darin, dass man eine Betragsgleichung löst:

Für die gesuchten Zahlen verwendet man eine Variable, etwa x.

Der gesuchte Abstand von der Zahl 1 ist dann $|x-1|$ (oder was dasselbe ist: $|1-x|$.)

Laut Aufgabe soll dieser Abstand 4 sein. $|x-1| = 4$

Diese Gleichung bedeutet: **Welches Argument hat den Betrag 4?**

So formuliert weiß man sofort die Antwort: Das kann nur 4 oder – 4 sein!

Die ausführliche Lösung unserer Betragsgleichung sieht daher so aus:

Gegeben:	$|x-1| = 4$	
1. Schritt:	$x-1 = \pm 4$	(Statt des Betrages setzt man rechts $\pm$.)
2. Schritt:	$x = \pm 4 + 1$	(Auf beiden Seiten wurde 1 addiert.)
3. Schritt	$x_1 = +4+1 = 5$	(Beide Lösungen werden getrennt berechnet.)
	$x_2 = -4+1 = -3$	
Lösungsmenge:	**L =** $\{-3\,;\,5\}$	

Beispiel 7 **Welche Zahlen haben von 12 den Abstand 12?**

Kurzform:

$$|x-12| = 12$$
$$x - 12 = \pm 12 \qquad | +12$$
$$x_{1,2} = \pm 12 + 12 = \begin{cases} 24 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow L = \{ 0 ; 24 \}$$

Beispiel 8 **Welche Zahlen haben von -6 den Abstand 2?**

$$|x+6| = 2$$
$$x + 6 = \pm 2 \qquad | -6$$
$$x_{1,2} = -6 \pm 2 = \begin{cases} -4 \\ -8 \end{cases} \Rightarrow L = \{ -4 ; -8 \}$$

Beispiel 9 **Welche Zahlen haben von -15 den Abstand 25?**

$$|x+15| = 25$$
$$x + 15 = \pm 25 \qquad | -15$$
$$x_{1,2} = -15 \pm 25 = \begin{cases} 10 \\ -40 \end{cases} \Rightarrow L = \{ 10 ; -40 \}$$

Anmerkung: Die Aufgabe $|x+15| = 25$ sucht alle Zahlen, die von der Zahl **-15** (nicht 15 !!!) den Abstand 25 haben.
Man darf nicht vergessen, dass bei der Abstandsberechnung im Betrag eine Differenz steht: Und $x + 15 = x - (-15)$!!!!

Betragsgleichungen mit x-Faktor:

Beispiel 10

$$|3x-5| = 1$$
$$3x - 5 = \pm 1$$
$$3x = 5 \pm 1$$
$$3x = \begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{4}{3} \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{L} = \{ 2 ; \tfrac{4}{3} \}$$

Beispiel 11

$$\left|4 - \tfrac{1}{3}x\right| = 8$$
$$4 - \tfrac{1}{3}x = \pm 8$$
$$-\tfrac{1}{3}x = -4 \pm 8 = \begin{cases} 4 \\ -12 \end{cases} \quad | \cdot (-3)$$
$$x_1 = -12, \quad x_2 = 36 \Rightarrow \mathbf{L} = \{ -12 , 36 \}$$

4. Betrag eines linearen Terms

Wie rechnet man mit $|x+3| = ?$ oder $|4-2x| = ?$ usw.

Merke: Die Zahl, die zwischen den Betragsstrichen steht, nennt man das Argument des Betrags. In $|x+3|$ ist also x+3 das Argument des Betrags.

Wenn das Argument eine Variable enthält, sieht man ja nicht mit einem Blick, ob das Ergebnis positiv oder negativ wird. Dazu muss man eine **Fallunterscheidung** machen:

Beispiel 12 Stelle $|x+3|$ ohne Betrag dar:

Vorarbeit: Wann gilt $x+3 \geq 0$?

Umstellen: $x \geq -3$. Für diese x darf der Betrag wegbleiben.

Für alle anderen, also für x < -3 ist $x+3<0$.

Dann ersetzt man den Betrag durch ein Minuszeichen:

Ergebnis:
$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{falls } x \geq -3 \\ -(x+3) & \text{falls } x < -3 \end{cases}$$

Oder:
$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{falls } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{falls } x < -3 \end{cases}$$

Beispiel 13 Stelle $|4-2x|$ ohne Betrag dar:

Vorarbeit: Wann gilt $4-2x \geq 0$?

Umstellen: $-2x \geq -4 \Leftrightarrow 2x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2$.

(Achtung: Division durch eine negative Zahl ändert die Ungleichung!)

Also ist für x >2 das Argument $4-2x<0$.

Dann ersetzt man den Betrag durch ein Minuszeichen:

Ergebnis:
$$|4-2x| = \begin{cases} 4-2x & \text{falls } x \leq 2 \\ -4+2x & \text{falls } x > 2 \end{cases}$$

Beispiel 14 Stelle $|3x+2|+4$ ohne Betrag dar:

Vorarbeit: Wann gilt $3x+2 \geq 0$? (Nur das Argument wird untersucht!)

Umstellen: $3x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$.

Für diese Zahlen darf der Betrag wegfallen.

Also ist für $x < -\frac{2}{3}$ $3x+2<0$.

Dann ersetzt man den Betrag durch ein Minuszeichen:

Ergebnis:
$$|3x+2|+4 = \begin{cases} (3x+2)+4 = 3x+6 & \text{falls } x \geq -\frac{2}{3} \\ -(3x+2)+4 = -3x+2 & \text{falls } x < -\frac{2}{3} \end{cases}$$